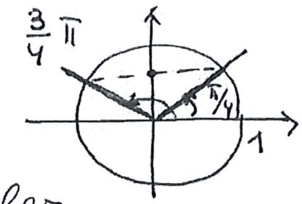
Lösningsskiss till tentan i Matematisk analys, del I
764G07, 2019-10-25.

1a) $\sin\left(2x+\frac{\pi}{2}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}$



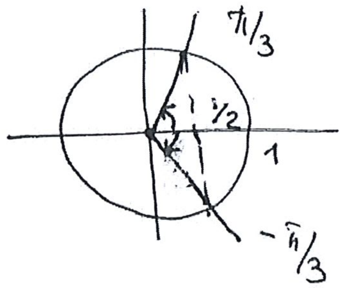
$\Updownarrow$

$2x+\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{4}+2\pi n,\ n\in\mathbb{Z}$ eller

$2x+\frac{\pi}{2}=\frac{3\pi}{4}+2\pi k,\ k\in\mathbb{Z}$ dvs $\underline{x=\pm\frac{\pi}{8}+\pi n,\ n\in\mathbb{Z}}$

1b.) $2\sin^2 x-5\cos x+1=0 \Leftrightarrow 2(1-\cos^2 x)-5\cos x+1=0$

$\Leftrightarrow -2\cos^2 x-5\cos x+3=0 \Leftrightarrow \cos x=\frac{1}{2}$ eller $\cos x=-3$



$\cos x=-3$ saknar lösning

$\cos x=\frac{1}{2} \Leftrightarrow \underline{x=\pm\frac{\pi}{3}+2\pi n,\ n\in\mathbb{Z}}$

1c) $\ln x^3+\ln\frac{2}{x}=\ln 2 \Leftrightarrow$

$3\ln x+\ln 2-\ln x=\ln 2 \Leftrightarrow 2\ln x=0$

$\Leftrightarrow \underline{x=1}.$

Svar: a) $x=\pm\frac{\pi}{8}+\pi n,\ n\in\mathbb{Z}$. b) $x=\pm\frac{\pi}{3}+2\pi n,\ n\in\mathbb{Z}$

c) $x=1$.

2a.) $z^3-3z^2+4z+8=0 \Leftrightarrow (z+1)(z^2-4z+8)=0$

$\Leftrightarrow \underline{z_1=-1},\ \underline{z_{2,3}=2\pm 2i}$

2b.) $\operatorname{Arg}\frac{(-1+i\sqrt{3})(1+i)}{2i(1-i)}=\operatorname{Arg}(-1+i\sqrt{3})+\operatorname{Arg}(1+i)-$

$-\operatorname{Arg}2i-\operatorname{Arg}(1-i)=\frac{2}{3}\pi+\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{2}-\left(-\frac{\pi}{4}\right)=\underline{\frac{2}{3}\pi}$

Svar: a) $z_1=-1,\ z_{2,3}=2\pm 2i$

b) $\operatorname{Arg} z=\frac{2}{3}\pi$.

3a. $$\lim_{x\to 2} \frac{x^3-x^2-x-2}{x^2-x-2} = \lim_{x\to 2} \frac{(x-2)(x^2+x+1)}{(x-2)(x+1)} = \lim_{x\to 2} \frac{x^2+x+1}{x+1}$$

$$= \frac{7}{3}.$$

3b. $$\lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{4x+1}-\sqrt{x+1}}{\sqrt{x}} = \lim_{x\to\infty} \frac{3x}{\sqrt{x}\left(\sqrt{4x+1}+\sqrt{x+1}\right)}$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{3}{\sqrt{4+\frac{1}{x}}+\sqrt{1+\frac{1}{x}}} = \underline{1}$$

3c. $$\lim_{x\to 1} \frac{e^{2x-2}-1}{\sin(x-1)} \;\Big/\; \begin{matrix} x-1=t \\ t\to 0 \end{matrix} \;\Big/ = \lim_{t\to 0} \frac{e^{2t}-1}{\sin t}$$

$$= \lim_{t\to 0} \frac{e^{2t}-1}{2t} \cdot \frac{2t}{t} \cdot \frac{t}{\sin t} = \underline{2} \text{ ty}$$

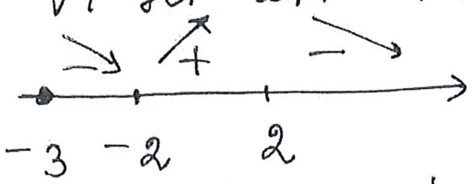
$$\lim_{t\to 0} \frac{e^{2t}-1}{2t} = 1 \quad \text{och} \quad \lim_{t\to 0} \frac{\sin t}{t} = 1.$$

Svar: a) $\frac{7}{3}$ b) 1 c) 2

4. $f(x) = e^{12x-x^3}$, $x \geq -3$

$f'(x) = e^{12x-x^3}(12-3x^2) = 3e^{12x-x^3}(4-x^2)$

Vi ser att $f'(x)=0 \iff x=\pm 2$



Det visar att f har lokalt minimum i $x=-2$ och lokalt maximum i punkten $x=2$

$f(-2)=e^{-16}$, $f(2)=e^{16}$. Dessutom

$f(-3)=e^{-9}$ och $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$

Alltså $\underline{f_{max} = f(2) = e^{16}}$, $\underline{f_{min} \text{ saknas.}}$

5. $y = \dfrac{e^x}{x+1}$

- $D_y = \{x \in \mathbb{R} : x \neq -1\}$; $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{e^x}{x+1} = \infty$

$\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{e^x}{x+1} = 0 \Rightarrow y = 0$ är vågräta asymptoten

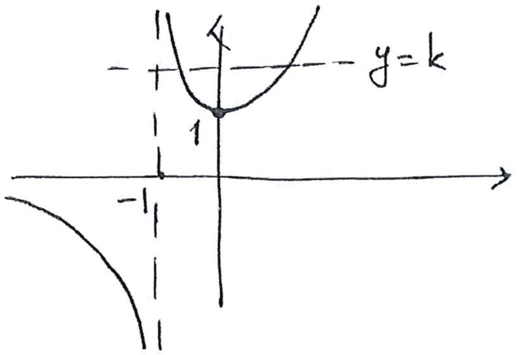
$\lim\limits_{x\to-1-} \dfrac{e^x}{x+1} = -\infty$, $\lim\limits_{x\to-1+} \dfrac{e^x}{x+1} = +\infty \Rightarrow x = -1$ är lodräta asyptoten

- $y' = \dfrac{e^x(x+1) - e^x}{(x+1)^2} = \dfrac{x e^x}{(x+1)^2} = 0 \Leftrightarrow x = 0$

$\searrow - \quad \searrow - \quad \nearrow +$; $-1 \quad 0$

y har lokalt minimum i 0

$y(0) = 1$



Vi ser från grafen att ekvationen $\dfrac{e^x}{x+1} = k$ har

2 reella rötter om $k > 1$
1 rot om $k = 1$ eller $k < 0$
ingen rot om $0 \le k < 1$.

6. $f(x) = \begin{cases} 4x^2 + 2b, & x \ge 1 \\ ax^3 + bx, & x < 1 \end{cases}$ $\quad f'(x) = \begin{cases} 8x, & x > 1 \\ 3ax^2 + b, & x < 1 \end{cases}$

För att $f(x)$ blir deriverbar för alla x är nödvändigt att f blir kontinuerlig i punkten $x = 1$, dvs $4 + 2b = a + b$ $\Leftrightarrow$ och $f'_-(1) = f'_+(1)$, dvs $8 = 3a + b$.

$\begin{cases} a - b = 4 \\ 3a + b = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 3 \\ b = -1 \end{cases}$

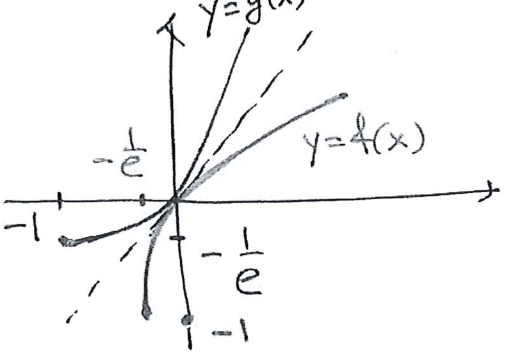
Svar: $a = 3$, $b = -1$.

7. $g(x) = xe^x$, $x \geq -1$. $g'(x) = e^x + xe^x = (1+x)e^x > 0$ för $x > -1$ $\Rightarrow$ $g(x)$ är strängt växande

Vi har att $g(x)$ är kontinuerlig och strängt växande för alla $x \in D_g$ $\Rightarrow$ g är inverterbar.

$\lim_{x\to -1} xe^x = -\frac{1}{e}$, $\lim_{x\to\infty} xe^x = \infty$ $\Rightarrow$ $D_g = [-1, \infty[$

$V_g = [-\frac{1}{e}, \infty[$



Alltså

$D_f = [-\frac{1}{e}, \infty[$, $V_f = [-1, \infty[$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{f(x)} \Bigg/ \begin{array}{l} t = f(x) \\ t \to \infty \text{ då } x \to \infty \\ x = f^{-1}(t) = te^t \end{array} \Bigg/ =$$

$$= \lim_{t\to\infty} \frac{\ln(te^t)}{t} = \lim_{t\to\infty} \frac{\ln t + t}{t} = \lim_{t\to\infty}\left(\frac{\ln t}{t} + 1\right) = 1$$

Svar: $D_f = [-\frac{1}{e}, \infty[$, $V_f = [-1, \infty[$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{f(x)} = 1$$